

فیلم‌های شب شبان

- فیزیک
- زیست
- ریاضی
- شیمی



جزوات شب امتحانی

ویدئوهای شب امتحانی



مسابق





فصل) ١ (محب و معادلة

(١٠ نمره)

مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n از رابطه روبرو به دست می‌آید:

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال کتاب: روی محيط دایره ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

answer

مجموع n جمله دنباله حسابی:

فرمول ۱: زمانی که جملات اول و آخر (a_1, a_n) را داشته باشیم از این فرمول استفاده می‌کنیم

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Leftarrow$$

فرمول ۲: اگر در همان فرمول ۱، بجای a_n بگذاریم $a_n = a_1 + (n-1)d$ فواهیم داشت

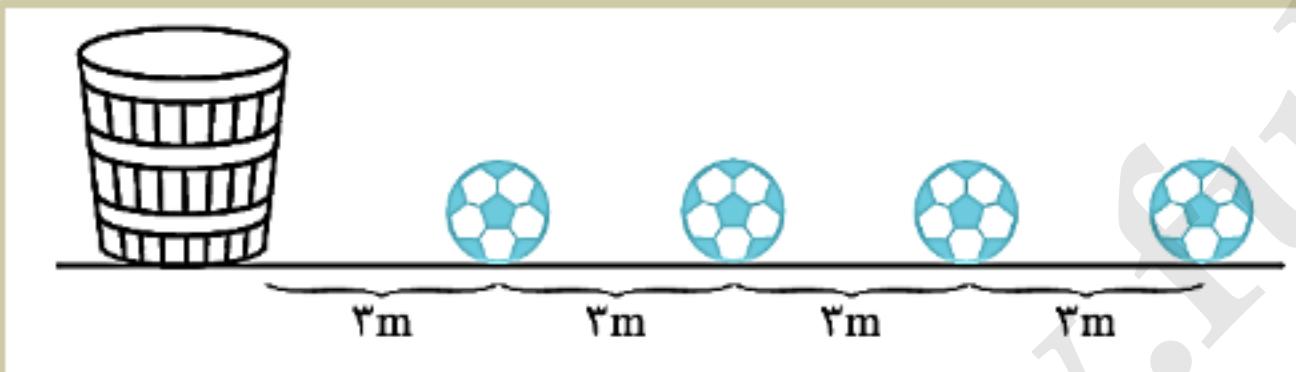
$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \Leftarrow$$

از این فرمول زمانی استفاده می‌کنیم که جمله اول (a_1) و قدر نسبت (d) را داشته باشیم.

answer

مثال: (کار, در کلاس)
مجموع همه اعداد طبیعی (و رقمی مفترب ۱۴) باید.

مثال: (مثال کتاب) در یک مسابقه، تعداد بسیاری توپ روی خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است. دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده، توپ اول را بردارد آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد. سپس به طرف توپ بعدی بدور و آن را بردارد و به دافل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد، حساب کنید جمیع چند توپ در سبد اندافت است.



answer

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مثال: (مثال کتاب) برای مهارهای مهارتی استفاده می‌شود که شدت پرتوها، ادر، هر بار، عبور نصف می‌کند. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش حداقل ۹۷ درصد کاهش یابد؟

answer

معادلات درجه دوم

مثال: (کار در کلاس) اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه دیگر آن کدام است؟

answer

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها در معادله درجه دوم

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

($\Delta > 0$ داریم: (با شرط $ax^2 + bx + c = 0$ ،

نکته: بر عکس نکته قبل هم داریم! اینکه اگر a و b عدد لفواه و α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ باشند.

$x^2 - Sx + P = 0$ جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

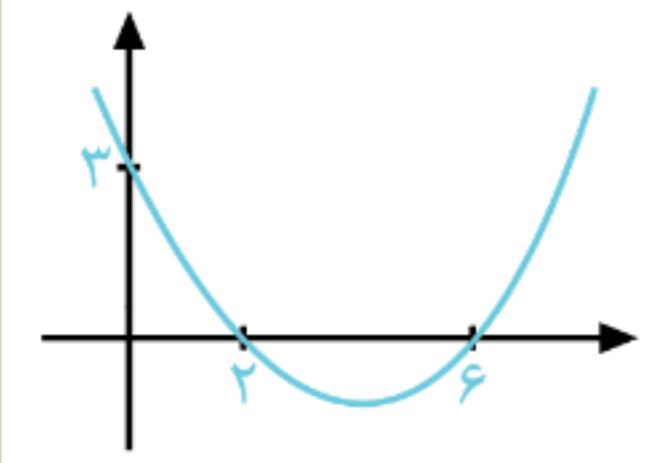
مثال: (مثال کتاب) محيط یک مستطیل ۳۳ سانتیمتر و مساحت آن ۶۵ سانتیمتر مربع است. ابعاد مستطیل را بباید.

answer

صفرهاي تابع

براي هر تابع f ، جوابهاي معادله $f(x) = 0$ (در صورت وجود) صفرهاي تابع می‌گويم. به لحاظ نموداري، صفرهاي تابع f همان طول نقاط تلاقعي نمودار f و مدور X ها است.

مثال: (مثال کتاب) اگر نمودار سومي $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زير باشد، خانبه سومي را مشخص کنيد.



answer

مثال: (کار در کلاس)

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صافرهاي تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ باشد، سپس صافرهاي دiger تابع را به دست آوريد.

answer

answer

مثال: (مثال کتاب) صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1 - 2)$ را به دست آورید.

روش هندسی حل معادلات

اگر f و g دو تابع باشند، جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ ، طول نقاط برفورد f و g می‌باشد. این روش حل را که از طریق آن، تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی آن‌ها (و گاهی حقیق) بدست می‌آید، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامیم.

answer

مثال: (مثال کتاب) به روش هندسی، معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

معادلات گویا و رادیکالی

عبارت گویا: یک عبارت کسری که صورت و مفرجش پندرجه‌ای است.

مثلاً $\frac{2x^2 - 1}{4x^2 - 5x + 1}$ یک عبارت گویاست.

معادلات گویا: گونه‌ای از معادلات است که از جمع و تفریق پند عبارت گویا تولید می‌شود.

روش حل معادلات گویا

همه‌ی عبارات را به یک سمت می‌بریم، طوری که مساوی صفر شوند. بعد بین همه‌ی آن‌ها مخرج مشترک

می‌گیریم، این گونه عبارت تبدیل به یک کسر به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ می‌شود. می‌دانیم کسری مساوی صفر است

که صورتش صفر باشد، در نتیجه باید $P(x) = 0$ در انتهای جواب‌ها را در مخرج چک می‌کنیم که مفرجی را صفر نکنند.

مثال: (مثال کتاب) در یک مغازه ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته. او چگونه می‌تواند غلظت محلول را به ۷ درصد برساند؟ (مسئله را در دو حالت وجود نمک به اندازه کافی و عدم وجود نمک به اندازه کافی حل کنید.)

answer

answer

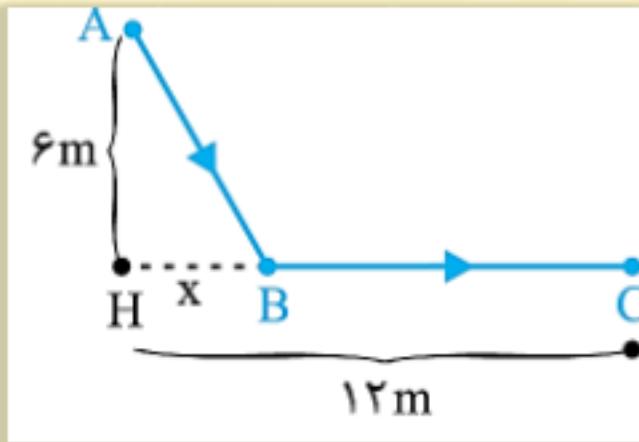
مثال: (مثال کتاب) معادله $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2 - 4}$ را حل کنید.

برfü از معادلات که دارای عبارات را دیگالی از مجهول هستند، ا معادلات گنگ می‌نامیم. برای حل آنها، ابتدا سعی می‌کنیم را در یک طرف تنها کنیم، بعد طریقین را به توان خوبی، را دیگال برسانیم و در صورت لزوم این عمل را تکرار کنیم تا به معادله‌ای بدون را دیگال برسیم. جواب‌های بدست آمده را هتما در معادله اصلی (او نیکه هنوز به توان نرسوندیم) چک کنید، زیرا گاهی عملیات توان‌رسانی، جواب‌های اضافی تولید می‌کنند.

مثال: (مثال کتاب) معادله $\sqrt{x+2} - x = -4$ را حل کنید.

answer

مثال: (مثال کتاب) یک مرغ دریایی در آسمان در نقطه قدرار دارد و با قصد شکار ماهی در نقطه روی آب، ابتدا از نقطه تا در هوا، فرود می‌آید، سپس از تا، روی آب و به صورت افقی پرواز می‌کند تا به برسد. اگر برای طی هر متر در هوا، ۱۴ کیلوکالری و روی آب، ۰.۱ کیلوکالری انرژی مصرف کند، در په فاصله‌ای از باید باشد تا مرغ دریایی روی هم کیلوکالری انرژی مصرف کند؟



answer

قدرت مطلق

یک تابع مثبت‌ساز است و طبق تعریف داریم:
مثال: (که در کلاس کتاب) عبارت‌های شکل بنویسید.
 $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ و $A = \sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}$

answer

answer

مثال: (مثل کتاب) نمودار $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$ تابع با ضایعه x , رسم کنید.

وېڭىھاي قدرمطلق

$$\textcircled{1} \quad |x| \geq 0$$

$$\textcircled{2} \quad |x| = a \Leftrightarrow x = a \quad \text{or} \quad x = -a \quad (a \geq 0)$$

$$\textcircled{3} \quad |-x| = |x|$$

$$\textcircled{4} \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\textcircled{5} \quad |x|^2 = x^2$$

$$\textcircled{6} \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

$$\textcircled{7} \quad |ab| = |a||b|$$

$$\textcircled{8} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$\textcircled{9} \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

$$\textcircled{10} \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$\textcircled{11} \quad |x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$$

$$\textcircled{12} \quad |x| \geq c \Leftrightarrow x \geq c \quad \text{or} \quad x \leq -c$$

مثال: (مئل کتاب) معادله $|3x - 2| = |x - 4|$ را حل کنید.

answer

رسم نمودار $y = |f(x)|$

کافی است نمودار $y = f(x)$ را، سعکنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محو، x هاست، قرینه نمودار $(x, f(x))$ را به صورت آینهوار نسبت به محو، x ها، سعکنیم.

مثال: (کل، در کلاس) به روش هندسی، معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را حل کنید و تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی آن‌ها را بیابید.

answer

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصله دو نقطه از هم $B\left| \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \right.$ و $A\left| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right.$

$$M\left| \begin{matrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{matrix} \right.$$

$$(B\left| \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \right. , A\left| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right.) AB$$

مثال: (مثال کتاب) معادله عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $B\left| \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right.$ و $A\left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right.$ را بهم وصل کرده است.

آیا نقطه $P\left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right.$ روی عمود منصف AB قرار دارد؟

answer

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله نقطه
از خط $A \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$

مثال: (مثال کتاب) فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقدار k است؟

answer

مثال: (کل، در کلاس) اگر نقطه $A(2,3)$ را س یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

answer

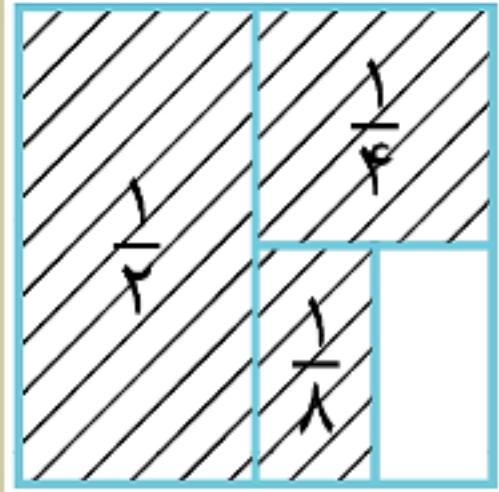
ا- (تمرین کتاب) در دنیا^ه حسابی ۵,۸,۱۱,... حداقل چند جمله از آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

answer

answer

۲- (تمرین کتاب) مجموع همه اعداد طبیعی سه، قمی که مغرب ۶ هستند چقدر می‌شود؟

۳- (تمرین کتاب) طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقیمانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقیمانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟



answer

answer

۴- (تمرین کتاب) صفرهای تابع $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$$

- ۵- (تمرین کتاب) معادله روبه رو را حل کنید.

answer

answer

۶- (تمرین کتاب) تعداد ریشه‌های معادله $|x - 1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

$$\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

۷- (تمرین کتاب) معادلات زیر را حل کنید.

answer

$$\frac{5}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

answer

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$$

answer

۸- (تمرین کتاب) ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۱ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

answer

۹- (تمرین کتاب) با استفاده از تعیین علامت، خابطه تابع $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

answer

$$\frac{y - x}{|x - y|} = 1$$

answer

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$$

answer

۱۱- (تمرین کتاب) نمودار تابع $f(x) = \|x\| - 2$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری حل نمایید.

answer

۱۳- (تمرین کتاب) نقاط دو سر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

answer

۱۳- (تمرین کتاب) فقط $4x + 3y = 5$ به مرکز مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

answer

۱۴- (تمرین کتاب) اگر خاصیت نقطه $A(1,2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

answer

۱۵- (تمرین کتاب) نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدا مختصات و تا نقطه‌ی $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.

answer

answer

۱۶- یک دنباله هندسی غیر یکنوا هشت جمله دارد. مجموع مجذورات چهار جمله اول آن چقدر است؟

۱۷- (امتحانات سال گذشته) در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ دو واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد، m و هر دو جواب معادله را پیابید.

answer

۱۸- (امتحانات سال گذشته) محيط یک زمین مستطیل شکل ۱۱ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

answer

۱۹- (امتحانات سال گذشته) در یک دنباله هندسی غیر ثابت، جمله اول آن، نصف مجموع دو جمله بعدی است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

answer

۲۰- (امتحانات سال گذشته) در یک دنباله هندسی، مجموع ده جمله اول ۳۳ برابر مجموع ۵ جمله اول است. قدر نسبت دنباله را به دست آورید.

answer

۲۱- (امتحانات سال گذشته) مساحت مربعی را بیابید که یک راس آن $(-1, 3)$ و یک ضلع آن $3x - 4y + 1 = 0$ معادله است.

answer



فَلَمْ يَرْجِعْ
نَمَرٌ (۸)

خب هتما می‌دونید که برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و خواصی از تابع که نفوذ ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد، معلوم باشد.

در فرم $\begin{cases} S: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$ مجموعه A دامنه تابع است. اما مجموعه B هم‌دامنه است نه برد. بدین‌زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه است. در واقع می‌گویند هم‌دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه‌ی لفواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

مثال: آنکه در کلاس با تغییر برای تابع $f : \left[0, \frac{1}{3}\right] \rightarrow [0, \infty)$ کدام یک از نمایش‌های زیر قابل قبول است؟

$$\begin{cases} f : \left[0, \frac{1}{3}\right] \rightarrow [0, \infty) \\ f(x) = x^2 \end{cases} \quad (ب)$$

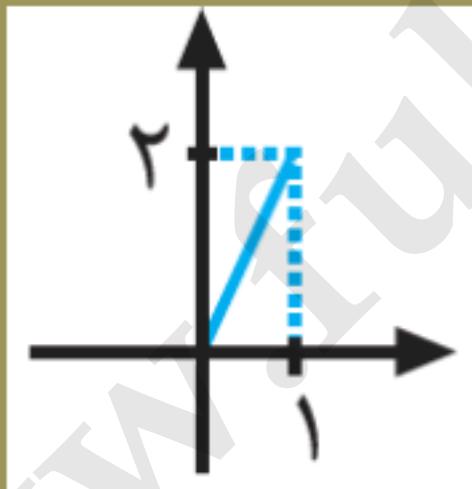
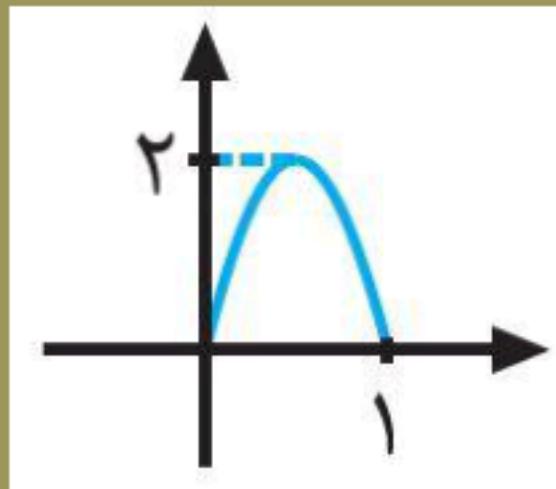
$$\begin{cases} f : \left[0, \frac{1}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases} \quad (الف)$$

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases} \quad (ج)$$

$$\begin{cases} f : \left[0, \frac{1}{3}\right] \rightarrow \left[0, \frac{1}{5}\right] \\ f(x) = x^2 \end{cases} \quad (ج)$$

شرط تساوی دو تابع :

نکته: هر دو تابع مساوی هستند اگر دامنه و برد مساوی هستند، اما هر دو تابعی که دامنه و برد مساوی داشته باشند صرفاً مساوی نیستند. مثلاً دو تابع روبه رو را بینید، دامنه هر دو $[0, 2]$ و برد هر دو $[1^{\circ}, 2^{\circ}]$ است. اما نمودار



آنها روی هم منطبق نیست و مساوی نیستند!

مثال: (کار در کلاس)

در جدول زیر کدام یک از توابع داده شده زیر با هم برابرند؟

I	$f = \{(1, 2), (5, 7)\}$	$g = \{(1, 7), (5, 2)\}$
P	$f = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{c}, \mathbf{d})\}$	$g = \{(\mathbf{c}, \mathbf{d}), (\mathbf{a}, \mathbf{b})\}$
μ	$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = rx \end{cases}$	$\begin{cases} g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = rx \end{cases}$
ε	$f(x) = x x $	$g(x) = x^\varepsilon$
\circ	$f(x) = \epsilon x$	$g(x) = \frac{\lambda x}{\gamma}$

$$\begin{cases} \mathbf{f(x)} = \sqrt{x^2 - x} \\ \mathbf{g(x)} = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases}$$

مثال: آیا دو تابع زیر مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

answer

آشنایی با پرداخته از انواع توابع

تابع گویا: تابعی که خابطه اش به صورت $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ باشد به طوری که $P(x)$ و $Q(x) \neq 0$ دو چندجمله‌ای باشند و

مثلاً تابعی نظیر $y = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 5x + 2}$ ، $y = \sqrt{5x}$ ، $y = 2$ ، $y = \frac{x-1}{x}$ ، $y = x^2$ گویا هستند.

دامنه تابع گویا: می‌شود همه اعداد حقیقی، به غیر از آن‌ها که مخرج کسر را صفر می‌کنند.

مثال: عبارت زیر را کامل کنید.

چون مخرج کسر $\frac{1}{x}$ نمی‌تواند باشد، پس نمی‌تواند در دامنه تابع با خابطه

باشد، بنابراین نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ مetur را قطع نمی‌کند.

مثال: (کار در کلاس)

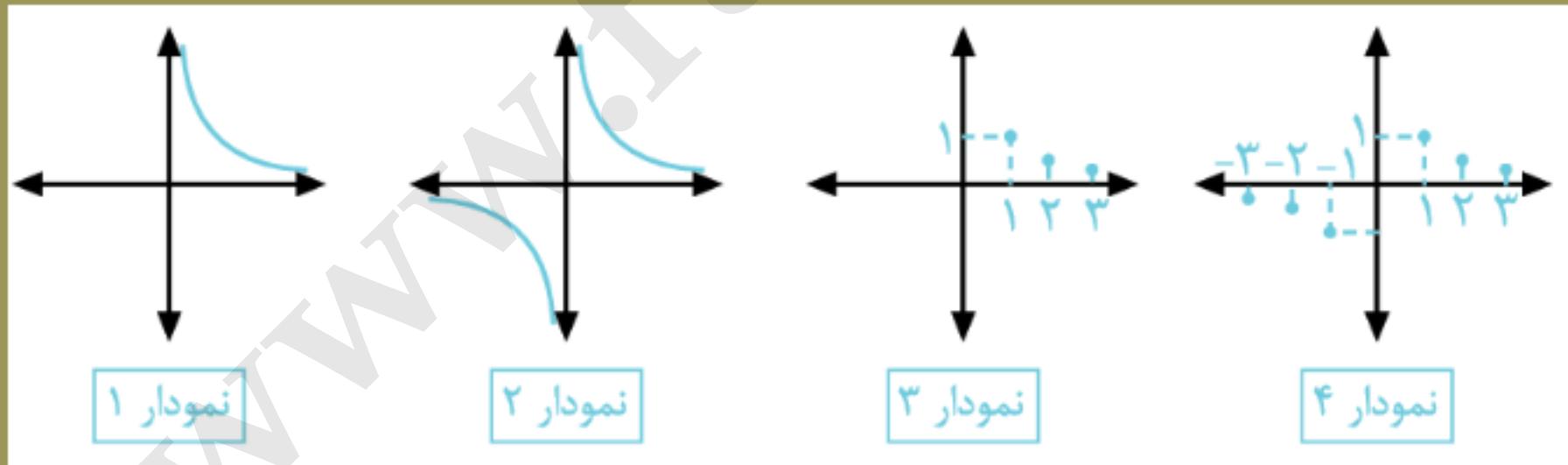
مشخص کنید که هر نمودار زیر متاظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

(الف) $\begin{cases} f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} h : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

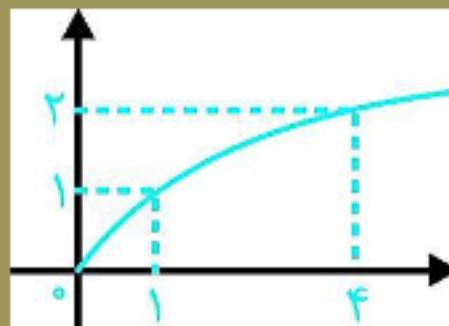
(ب) $\begin{cases} g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

(ت) $\begin{cases} t : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$



توابع رادیکالی

در کتاب درسی فقط توابع رادیکالی با خرجه ۲ زیر ذره بین برده شده که دامنه آن‌ها مقادیری از x است که زیر رادیکال را نامنفی (بزرگ‌تر مساوی صفر) کند. ساده‌ترین تابع رادیکالی $y = \sqrt{x}$ است که دامنه آن مقادیر بازه $[0, \infty)$ است. نمودار آن که به نمودار آبرویی معروف است به صورت رو به رو است.



روش رسم توابع رادیکالی به خرم $y = \sqrt{ax + b}$: دامنه‌اش را مشخص کن، سپس یک ابرو در دامنه‌اش رسم کن.

مثال: نمودار $y = -2\sqrt{-x + 1} + 3$ را رسم کنید.

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر x و y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. یک رابطه می‌تواند یک تابع را مشخص کند، مانند $y = x^2$ که به ازای هر x ، یک y تحویل می‌دهد. همچنین یک رابطه می‌تواند یک تابع نباشد، مانند $x = y^2$ (مثلاً به ازای $y = 4$ ، دو مقدار برای x بدرست می‌آید.)

تو امتحانت اگر دیدی که y ، توانش زوجه یا دافل قدر، مطلقه، تابع نیست! ($99/9\%$) و اسه اینکه رد کنی تابع بودنش رو، کافیه یه مقدار به x بدی و نشون بدی y تا مقدار می‌گیره.

مثال: (کار در کلاس) کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ (لیل پیاویرید.

$$x = |y| + 1 \quad \text{(ب)}$$

$$y = |x| + 1 \quad \text{(الف)}$$

تابع پله‌ای

به تابعی که دامنه آن را بتوان به صورت تعدادی بازه جدا از هم نوشت و به هر یک از این بازه‌ها تنها یک عدد در برد نسبت دارد، تابع پله‌ای می‌گویند. (به عبارت دیگر در هر بازه از دامنه آن‌ها، یک تابع ثابت وجود دارد.)

مثلاً

$$y = \begin{cases} -1 & -2 < x < -1 \\ 2 & 0 \leq x < 4 \\ 1 & 4 \leq x < 6 \end{cases}$$

یک تابع پله‌ای است.

مشهورترین تابع پله‌ای تابع جزء صحیح است. تعریفش را بیینید:
تابع جزء صحیح (تابع برآکت): جزء صحیح هر عدد می‌شود اولین عدد صحیح کوچک‌تر از فوتش. این تابع به صورت $f(x) = [x]$ نشان داده می‌شود. به طور مثال:

$$[-4/9] = -5 \quad [3/1] = 3 \quad [5/9] = 5 \quad [-4/3] = -5$$

نکته: جزء صحیح یک عدد صحیح می‌شود فوتش.

answer

مثال: (تمرین کتاب) تابع $f(x) = [x] + 2$ را رسم کنید.

مثال: اگر $f(x) = [x+3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2-\sqrt{2})$ برابر است.

مثال: (کار در کلاس با تغییر)

نمودار تابع $f(x) = [3x] + 1$ را در بازه $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ می‌رسم کنید.

answer

وارون یک تابع و تابع یک به یک

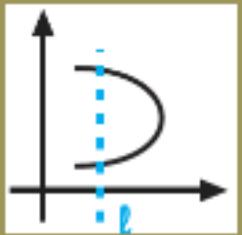
تعریف یک به یک بودن f از روی زوج مرتب: تابع f زمانی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتبی برد های (لاهای) برابر نداشته باشند. اگر برد آنها برابر باشد، باید دامنه آنها نیز برابر باشد!

مثلا $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$ تابع است (چون دامنه آنها متفاوت است) اما یک به یک نیست. اصلًا تابع نیست که بفوادر یک به یک باشد یا خیر! وقت کنیم که یک به یک بودن از ویژگی های یک تابع است.

اما در مثال $h = \{(1, 2), (3, 4), (2, 1)\}$ تابع است. یک تابع یک به یک. مثل یک مرد!!

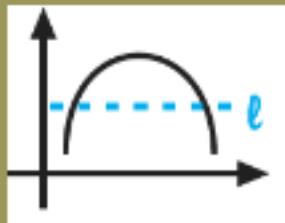
تّشخیص یک په یک از روی نمودار

تابع نیست که



هر خط موازی محو، X ها، باید نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع کند. مثلا

تابع است اما چون



بنوادر یک به یک باشد. (فقط ا نمودار بزرگوار را در دو نقطه قطع کرده!) مثلا

مربوط به



خط ا موازی محو، X ها) نمودارش را در ۲ نقطه قطع کرده دیگر یک به یک نیست، اما تابعی یک به یک است.

وارون تابع f

اگر وارون f (معلوس f)، خود تابع یک باشد، f را وارون‌پذیر (معلوس‌پذیر) می‌نامیم و معلوس f را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

حال سوال اینجاست که په زمانی f معلوس‌پذیر است؟

شرط وارون‌پذیری f : تابع f وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

معلوس کردن f از روی زوج مرتب: کافی است جای مولفه‌های طول و عرض زوج مرتب‌ها را عوض کنید.

به دست آوردن نمودار f^{-1} : گفتیم اگر f یک به یک باشد، معلوس‌پذیر است و نمودار f و f^{-1} نسبت به خط

(نیمساز ربع اول و سوم) قرینه‌اند. $y = x$

$$D_f = R_{f^{-1}}$$

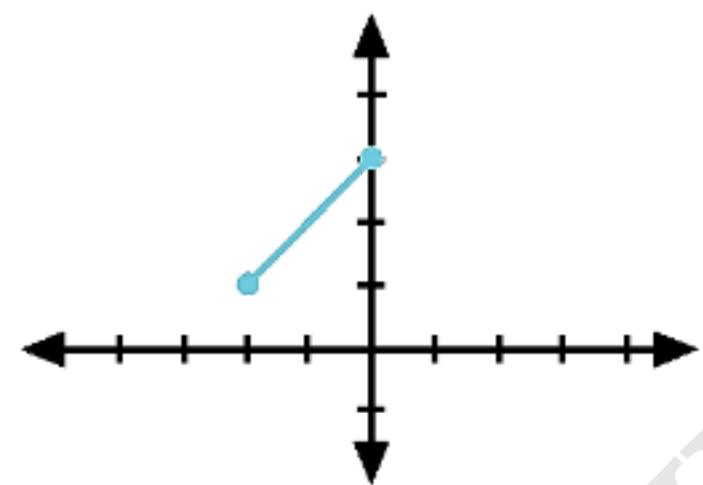
$$R_f = D_{f^{-1}}$$

نتیجه:

مثال: تابع وارون هر یک از توابع زیر را بیابید.

$$\{((2, 3)(-2, 1)(-1, 2)\}$$

answer



answer

پدست آوردن ضابطه‌ی وارون تابع f

ابتدا به جای (x) f ، نماد لا قدرار می‌دهیم. سپس سعی می‌کنیم (در صورت امکان) X را برهسب لا بنویسیم.

(X را تنها می‌کنیم!) در آفر به جای X ، $f^{-1}(x)$ یا y^{-1} و به جای X ، y قدرار می‌دهیم.

مثلا می‌خواهیم وارون تابع $f(x) = 2x + \frac{1}{3}$ را به دست بیاوریم! چون نمودار این تابع خطی، صعودی است، پس

هر خط موازی محور X ها، نمودارش را در یک نقطه قطع می‌کند و در نتیجه f یک به یک است. پس وارون‌پذیر نیز هست. بقیه راه حل را ببینید!

مثال: نشان دهید که وارون تابع داده شده، یک تابع درجه دوم است.

answer

مثال: (کل، در کلاس)

اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x - 2}$ و دامنه و برد f و f^{-1} را پیابید.

answer

مثال: (مثال کتاب)

نشان دهید تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ وارون ناپذیر است. سپس دامنه آن را طوری محدود کنید که در دامنه جدید، یک به یک و در نتیجه معکوس پذیر باشد.

answer

اعمال جبری روی توابع، رسم نمودار توابع

۱- جمع $((f+g)(x))$: یعنی خاکبته دو تابع را با هم جمع کنیم، $f(x)+g(x) \leftarrow$ دامنه این تابع می‌شود.

۲- تفریق $((f-g)(x))$: یعنی خاکبته دو تابع را از هم کم کنیم، $f(x)-g(x) \leftarrow$ دامنه این تابع می‌شود.

۳- ضرب $((f \cdot g)(x))$: یعنی خاکبته دو تابع را در هم ضرب کنیم، $f(x) \times g(x) \leftarrow$ دامنه این تابع می‌شود.

۴- تقسیم $((\frac{f}{g})(x))$: یعنی خاکبته دو تابع را بر هم تقسیم کنیم، $\frac{f(x)}{g(x)} \leftarrow$ دامنه این تابع می‌شود.

$D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

answer

مثال: دو تابع $g(x) = \sqrt{x+1}$ و $f(x) = \frac{1}{x}$ را بیاورد، $\frac{f}{g}$ ، $f \times g$ ، $f \pm g$ را در نظر بگیرید. دامنه و خواصه توابع

answer

مثال: توابع $g(x) = -2$ و $f(x) = 3 - x^2$ داره شده‌اند.

(الف) نمودار تابع $g + f$ را، رسم کنید. (راه حل نوشته شود.)
ب) مقدار $(f \cdot g)(0)$ را، محاسبه کنید.

ترکیب دو تابع ۸ و ۹

$$gof(x) = g(f(x)) \quad , \quad fog(x) = f(g(x))$$

- نکته: هواست باشه تو محاسبات باید به جای هرف O ، پرانتز بذاری. مثلا $f(g(h(x)))$ یعنی f و g و h را از د AFL شروع کن. تو همین مثال، اول $h(x)$ را محاسب کن! مثلا میشه k بعد $g(k)$ و $f(m)$ را محاسب کن! مثلا میشه m در آفر هم

دامنه تابع مرکب

$$D_{fog} = \left\{ \begin{array}{l} (1) \\ \boxed{x \in D_g} \quad | \quad \boxed{g(x) \in D_f} \end{array} \right\}$$

$$D_{fog} = \left\{ x \mid \begin{array}{l} (1) \\ \boxed{x \in D_g} \quad , \quad \boxed{g(x) \in D_f} \end{array} \right\}$$

که این دو هیچ فرقی با هم ندارن!

نکته: دامنه تابع را همیشه از راه تعریف (که الان گفتم) به دست بیارید نه از روی ساختن فناپطه
مثال: (مثال و کار در کلاس کتاب) در هر قسمت، موارد فوایسته شده را بیابید.

؛ fog(x) ← دامنه و فناپطه (x) $\leftarrow g(x) = 2x^2 - 1$ ، $f(x) = \sqrt{x-1}$ (الف)

answer

؛ $f(x) \leftarrow f(x) = \frac{2}{x-1}$ (ب)

answer

answer

مثال: توابع $f(x) = \{ (1, 2), (3, 4) \}$ و $g(x) = \{ (2, 3), (5, 6) \}$ را به دست آورید.

ا- (تمرین کتاب) کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم دامنه تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم دامنه تابع، زیرمجموعه‌ای از برد آن است. ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن، بازه است.

answer

۲- (تمرین کتاب) دامنه توابع زیر را پیابید.

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$$

answer

$$f(x) = \sqrt{\lambda - x}$$

answer

۳- (تمرین کتاب) نمودار توابع زیر را، رسم نموده، دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

$$f(x) = \sqrt{x - 2} + 5$$

answer

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x+2} & x \geq 0 \end{cases}$$

answer

۴- (تمرین کتاب) نمودار تابع‌های زیر را، سعی کنید.

$$f(x) = [x] + 1 \quad , \quad -2 \leq x < 3$$

answer

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}x \right] \quad , \quad -4 \leq x < 4$$

answer

-۵- (تمرین کتاب) به کمک رسم نمودار، وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و خابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست آورید.

$$f(x) = (x + 5)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad x \geq 5$$

answer

$$f(x) = -|x - 1| + 1 \quad , \quad x \geq 2$$

answer

$$f(x) = (x - 3)^5$$

answer

$$f(x) = \sqrt{x + 2} - 3$$

answer

answer

۶- (تمرین کتاب) وارون تابع $f(x) = \frac{-1}{2}x + 3$ را پیاپید و نمودار و وارون آن را، سم کنید.

۷- (تمرین کتاب) برای دو تابع fog و $(f \circ g)$ ابهاست آورید.

answer

answer

۱- (تمرین کتاب) اگر $\mathbf{g} = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ و $\mathbf{f} = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{2}, 0), (3, -5)\}$

توابع \mathbf{g} ، \mathbf{f} ، $\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$ ، $\mathbf{f} - \mathbf{g}$ ، $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ توابع آورید.

ابتدا \mathbf{f} را مهاسبه کنید. سپس عمل بعدی مربوطه را روی بردار اعمال کنید.

۹- (امتحانات سال گذشته) اگر $f(x) = x^3 + 2x + 2$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $g(x)$ باشد، تابع $(f \circ g)(x) = x^3 - 4x + 5$

$$(f \circ g)(x) = x^3 - 4x + 5$$

answer

answer

۱۰- (امتحانات سال گذشته) اگر $\mathbf{g} = \{(0, 4)(3, 2)(5, 6)(8, 0)\}$ و $f(x) = \sqrt{x - 3}$ دو تابع باشند:

الف) تابع fog را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید. ب) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

answer

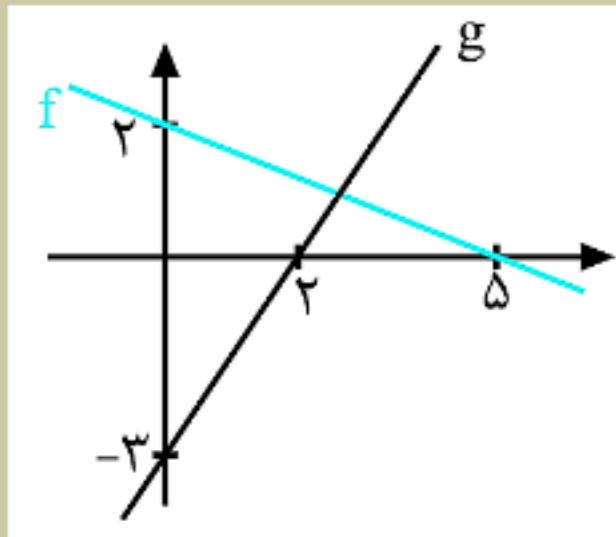
۱۱- (امتحانات سال گذشته) آیا دو تابع $g(x) = \sqrt{x - 3}$ و $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ با هم مساوی‌اند. پرایز

۱۲- (امتحانات سال گذشته) دو تابع $f = \{(2, 5)(6, 3)(3, 7)(4, 1)(1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند.

اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a را به درست آورید.

answer

۱۳- (امتحانات سال گذشته) نمودار توابع f و g داده شده‌اند، خواسته توابع f و g را به دست آورید.



answer

توابع نمایی و لگاریتمی



توابع نمایی

تعریف تابع نمایی: هر تابع با ضابطه $y = a^x$ که $a \in \mathbb{R}$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود،

مانند: $y = (\sqrt{2})^x$ ، $y = (\frac{1}{2})^x$...

حالت اول: $a > 1$ اگر پایه بزرگ‌تر از یک باشد، با افزایش a مقدار تابع، یعنی $y = a^x$ افزایش می‌یابد،

و نمودار هالت صعودی آنید فواهد داشت.



پرداختی و پیشگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

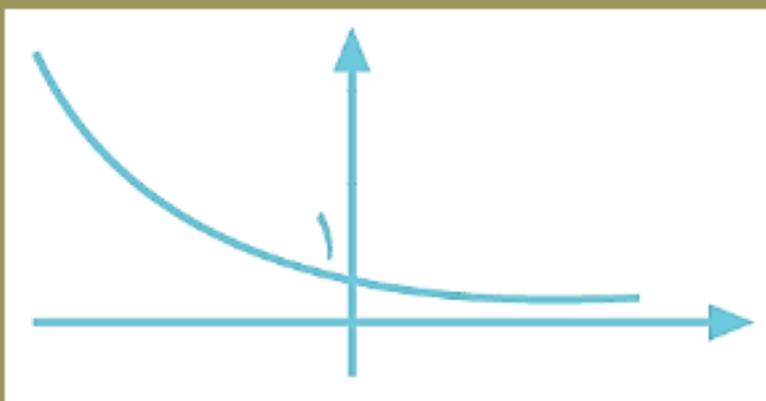
- ۱- این تابع یک به یک و در نتیجه مغلوس‌پذیر است. (چون هر فط موازی محور X ها نمودارش را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.)
- ۲- عرض از مبدأ (یعنی محل عبور نمودار از محور $(ها)$) این نمودار یک است. (شما به X بده صفر) $\leftarrow 1 = a = 1$
- ۳- این نمودار همیشه بالای محور X است و به ازای $a^x > 0$ ، $x \in \mathbb{R}$
- ۴- همان‌گونه که می‌بینید، این تابع هیچ محدودیتی برای مقادیر ورودی اعمال نمی‌کند و دامنه‌اش است. اما فروجی آن همان‌طور که گفتیم فقط مقادیر مثبت را تولید می‌کند. پس برای این تابع $(0, +\infty)$ است.

مثال: نمودار توابع γ , α , β , δ را در سطحه مختصات x , y نسبت به هم مقایسه کنید.

$$y = \gamma^x, y = \alpha^x, y = \beta^x$$

answer

حالت دوم: در این حالت پایه بین صفر و یک است و در نتیجه با افزایش مقادیر X ، مقدار لاکاهش می‌یابد و نمودارش آنکه نزولی است.



پرداختی از ویژگی‌های این تابع با توجه به نمودارش

- ۱- این تابع یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.
- ۲- این نمودار در عرض $y = 1$ از مهور لاهانگر می‌گذرد و در نتیجه عرض از مبدأ آن $y = 1$ است.
- ۳- این نمودار همواره بالای مهور X ها با خوش کرده و در نتیجه به ازای $a^x > 0$ ، $x \in \mathbb{R}$
- ۴- این تابع هم هیچ محدودیت و گیری برای مقادیر ورودی اعمال نمی‌کند و دامنه‌اش می‌شود $D_y = \mathbb{R}$.
اما با توجه به نمودار در می‌یابیم که برد این تابع $R_y = (0, +\infty)$ است.

مثال: نمودار توابع زیر را در یک دستگاه مختصات، سum کنید و وضعیت آن‌ها را نسبت به هم مقایسه کنید.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

answer

معادلات نمایی

اگر b یک عدد مثبت باشد و $x = y$ آنگاه $b^x = b^y$ و برعکس.

مثال: معادله های زیر را حل کنید.

$$4^{2x-1} = \lambda^{x+1}$$

$$5^{3x-1} = 125^{x+1}$$

نامعادلات نمایی

نامعادلاتی اند به فرم $b^x \geq b^y$ که ۲ حالت کلی دارند:

حالت اول: اگر $1 > b$ آنگاه $x \geq y$ و بالعکس. (جهت عوض نمی‌شود!)

حالت دوم: اگر $1 < b < 0$ آنگاه $x \leq y$ و بالعکس. (جهت عوض می‌شود!)

مثالاً اگر $5^x \leq 5^4$ و اگر $(\frac{1}{5})^x \leq (\frac{1}{5})^4$ آنگاه $x \geq 4$.

مثال: مجموعه جواب نامعادلات زیر را به دست آورید!

$$2^{x-3} \leq \frac{1}{(32)^3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+5} < \left(\frac{1}{3}\right)^y$$